

# Przedział rozszerzenia jako miara niepewności pomiaru

**dr inż. Paweł Fotowicz**

Główny Urząd Miar w Warszawie

Dokument JCGM 101:2008 wyznacza nowy standard obliczania niepewności pomiaru. Zgodnie z jego wykładnią miarą niepewności pomiaru jest przedział rozszerzenia, który definiowany jest na dwa sposoby. Pierwsza definicja mówi, że jest to probabilistycznie symetryczny przedział, poza granicami którego istnieje jednakowe prawdopodobieństwo wartości dla wielkości wyjściowej. Druga definicja mówi, że jest to najkrótszy ze wszystkich możliwych przedziałów związanych z tym samym prawdopodobieństwem rozszerzenia.

Wyznaczanie przedziału rozszerzenia w oparciu o pierwszą definicję zakłada, że prawdopodobieństwo wartości po obu jego stronach jest jednakowe. Jeżeli przyjmiemy, że prawdopodobieństwo rozszerzenia wynosi 0,95 to granice przedziału wyznaczają kwantyle rozkładu  $G^{-1}(0,025)$  oraz  $G^{-1}(0,975)$ , będące funkcjami odwrotnymi (argumentami) dystrybuanty wielkości wyjściowej. Umownie przedział ten można oznaczyć jako

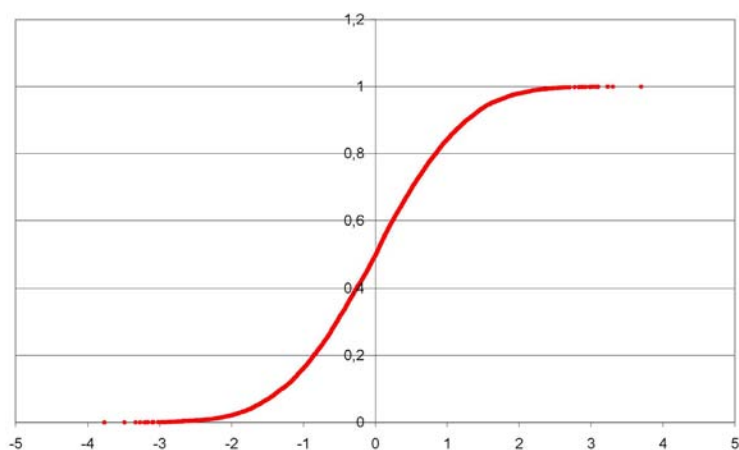
$$I_{\text{sym}} = [G^{-1}(0,025), G^{-1}(0,975)]$$

Wyznaczanie przedziału rozszerzenia w oparciu o drugą definicję nakazuje przyjęcie najmniejszego przedziału ze zbioru wszystkich przedziałów dla tego samego prawdopodobieństwa. Dla prawdopodobieństwa rozszerzenia 0,95 będzie to przedział o wartościach granicznych, dla których różnica wartości górnej  $G^{-1}(\alpha + 0,95)$  i dolnej  $G^{-1}(\alpha)$  będzie najmniejsza. Umownie przedział ten można zapisać jako

$$I_{\text{min}} = [G^{-1}(\alpha), G^{-1}(\alpha + 0,95)], \text{ gdy } G^{-1}(\alpha + 0,95) - G^{-1}(\alpha) = \min$$

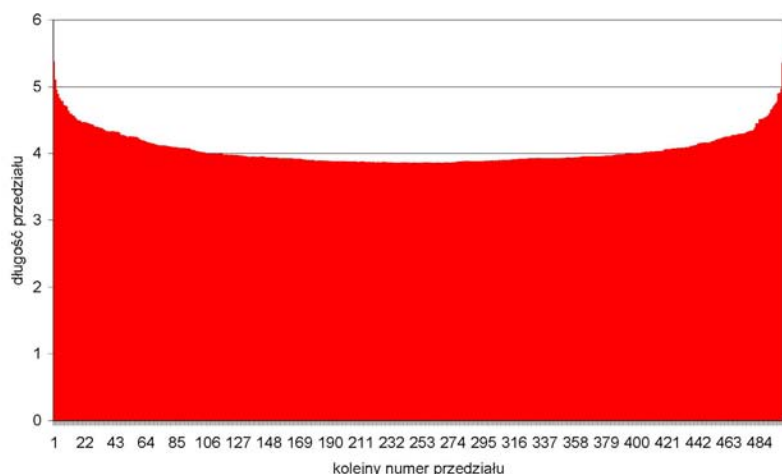
Zalecana przez przywołany dokument, numeryczna procedura obliczania przedziału rozszerzenia dla prawdopodobieństwa 0,95, w oparciu o metodę Monte Carlo, przewiduje liczbę losowań  $M = 10\ 000$ . Każda z wyznaczonych 10 000 wartości stanowi element zbioru możliwych wartości rozkładu wielkości wyjściowej. Po uporządkowaniu elementów tego zbioru w postaci rosnącego ciągu wartości i przypisaniu każdemu z nich kolejnego prawdopodobieństwa, począwszy od  $p = 0,0001$ , a skończywszy na  $p = 1$ , granice przedziału rozszerzenia, zgodnie z pierwszą definicją, wyznaczają wartości reprezentowane przez element o numerze 250 i 9750. W przypadku realizacji drugiej definicji otrzymamy aż 500 przedziałów rozszerzenia dla prawdopodobieństwa 0,95. Będą to kolejne przedziały pomiędzy parami elementów zbioru o numerach od 1 i 9501 do 500 i 10 000. Spośród nich należy wybrać najmniejszy. Czy długości obu przedziałów: probabilistycznie symetrycznego i najkrótszego różnią się? Prześledźmy to na dwóch przykładach: rozkładu normalnego, jako typowego rozkładu symetrycznego oraz rozkładu asymetrycznego, chi kwadrat.

Używając generatora liczb losowych o rozkładzie normalnym standaryzowanym  $N(0,1)$  tworzymy zbiór 10 000 wartości. Sortując zbiór tych wartości w porządku rosnącym i przypisując każdej z nich kolejne prawdopodobieństwo, zaczynając od  $p = 0,0001$ , a kończąc na  $p = 1$ , otrzymujemy dystrybuantę numeryczną tego rozkładu (rys. 1).



Rys. 1. Dystrybuanta numeryczna rozkładu normalnego

Na podstawie wykonanych obliczeń długości obu przedziałów rozszerzenia przykładowo otrzymujemy wartości: 3,91 dla przedziału najkrótszego i 3,93 dla przedziału symetrycznego. Oba przedziały nieznacznie się różnią, o 0,5 % wartości. Wartości tych przedziałów są zgodne z długością przedziału ufności dla rozkładu normalnego przy poziomie ufności 95 %, która wynosi 3,92 (długość przedziału ufności wyznacza różnica pomiędzy dwoma kwantylami rozkładu 1,96 i -1,96). Zbiór przykładowych wartości wszystkich 500. przedziałów rozszerzenia ilustruje rys. 2.

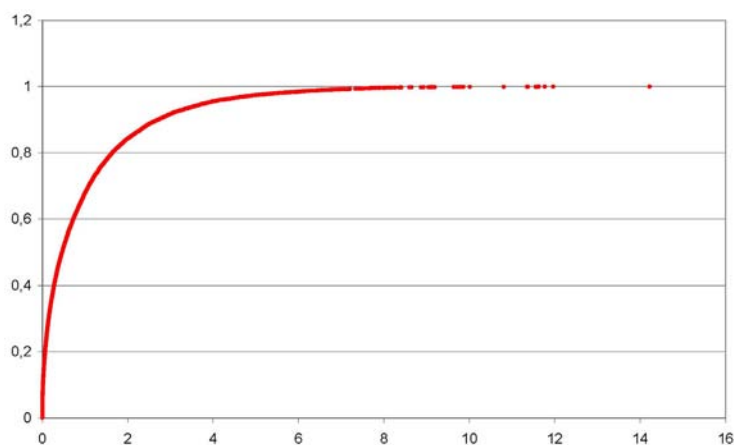


Rys. 2. Numeryczne przedziały rozszerzenia dla rozkładu normalnego

Inaczej sytuacja przedstawia się, gdy mamy do czynienia z rozkładem asymetrycznym. Rozkład chi kwadrat o jednym stopniu swobody można otrzymać podnosząc do kwadratu wartości dla rozkładu normalnego

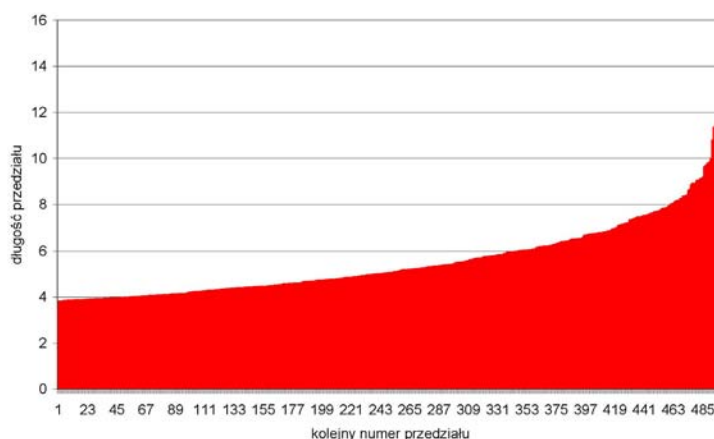
$$\chi_1^2 = [N(0,1)]^2$$

Obliczając powyższe równanie 10 000 razy uzyskujemy zbiór wartości o rozkładzie chi kwadrat o jednym stopniu swobody. Sortując zbiór tych wartości w porządku rosnącym i przypisując każdej z nich kolejne prawdopodobieństwo, zaczynając od  $p = 0,0001$ , a kończąc na  $p = 1$ , otrzymujemy dystrybuantę numeryczną rozkładu chi kwadrat (rys. 3).



Rys. 3. Dystrybuanta numeryczna rozkładu chi kwadrat z jednym stopniem swobody

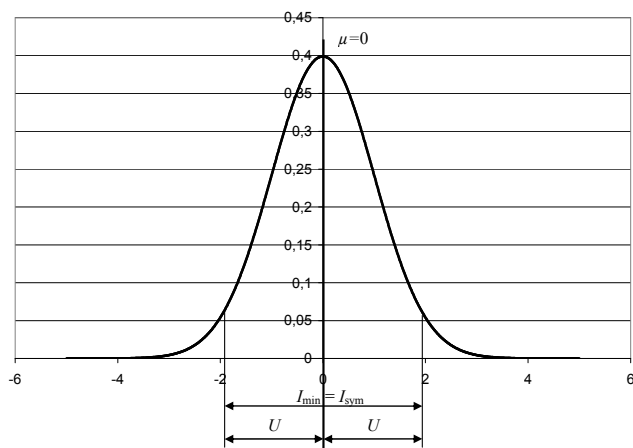
Na podstawie wykonanych obliczeń wartości obu przedziałów rozszerzenia przykładowo otrzymujemy wartości: 3,839 dla przedziału najkrótszego i 5,062 dla przedziału symetrycznego. Oba przedziały znacznie się różnią, aż o 32 % wartości, przy czym wartość pierwszego przedziału jest bliska wartości kwantyla rozkładu chi kwadrat dla poziomu ufności 95 %, wynoszącego 3,841 (kwantyl tego rozkładu jest równy przedziałowi ufności, który jest przedziałem jednostronnym). Zbiór wartości wszystkich 500. przedziałów rozszerzenia ilustruje rys. 4.



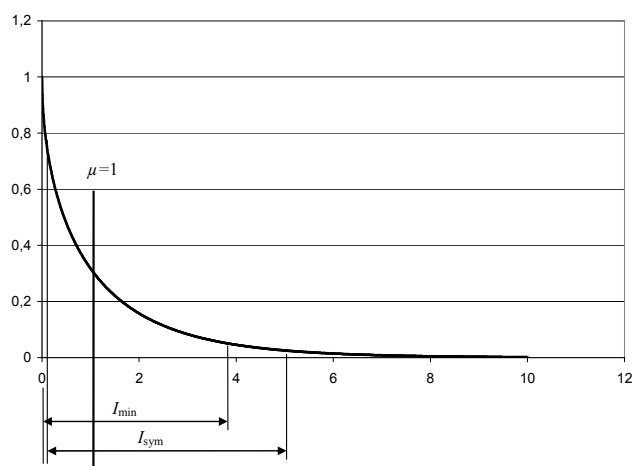
Rys. 4. Numeryczne przedziały rozszerzenia dla rozkładu chi kwadrat z jednym stopniem swobody

Estymatą wielkości mierzonej jest wartość średnia, będąca wartością oczekiwaną rozkładu prawdopodobieństwa. W przypadku rozkładu normalnego standaryzowanego wynosi ona zero,  $\mu = 0$  (rys. 5). Wokół estymaty budowany jest przedział rozszerzenia. Dla rozkładu symetrycznego wartość oczekiwana dzieli przedział na połowy równe liczbowo niepewności rozszerzonej. Przedział rozszerzenia symetryczny i najkrótszy są porównywalne, choć ze względu na dokładność obliczeniową metody Monte Carlo, przedział najkrótszy jest zazwyczaj nieznacznie węższy od symetrycznego.

Wartość oczekiwana dla rozkładu chi kwadrat o jednym stopniu swobody wynosi jeden,  $\mu = 1$ . Wartość ta nie wyznacza jednak środka przedziału rozszerzenia zarówno najkrótszego jak i symetrycznego (rys. 6). Nie można w tym wypadku określić niepewności rozszerzonej, a jedynie wyznaczyć granice przedziału rozszerzenia. Sytuacja taka może zaistnieć, gdy



Rys. 5. Rozkład normalny standaryzowany



Rys. 6. Rozkład chi kwadrat o jednym stopniu swobody

wielkość mierzona zdefiniowana jest przy użyciu modelu nieliniowego. Niepewność rozszerzona bowiem, stosowana powszechnie jako miara niedokładności w metrologii, określa symetryczne rozproszenie wartości dla wielkości mierzonej wokół jej estymaty.