

# Alternatywne metodyki obliczania niepewności pomiaru

**Paweł Fotowicz**

Główny Urząd Miar

Przedstawiono dwie alternatywne metodyki obliczania niepewności pomiaru stosowane wspólnie w metrologii. Pierwsza z nich opiera się na zaleceniach Przewodnika i zawartym tam prawie propagacji niepewności. Druga opiera się na prawdopodobieństwie warunkowym wynikającym z zastosowania twierdzenia Bayesa. Obie metodyki prowadzą do różnych wyników, bowiem wykorzystują inne podstawy obliczeniowe. Pierwsza opiera się na splocie rozkładów wielkości wejściowych, a druga na ich iloczynie. Pierwsza chętnie stosowana jest przy ocenie wyników określonego pomiaru, a druga przy opracowaniu wyników porównań.

## Alternative methodologies for calculating measurement uncertainty

The alternative methodologies for calculating measurement uncertainty used in modern metrology are presented. The first method is based on recommendation of the Guide and the law of uncertainty propagation. The second method is based on conditional probability and application of the Bayes theorem. Those methodologies lead to different results because of using different basis of calculations. The calculation of the first method is connected with convolution of input quantity distributions but the calculation of the second method is connected with multiplication of input quantity distributions. The coverage interval calculated with the GUM method is larger than the coverage interval calculated with the Bayesian method. In the first method the estimate of the measurand is an arithmetic average of observations, but in the second method the estimate is a weighted average, modified by the standard uncertainty attributed to the specified result of observation. The Bayesian method is willingly utilized at inter-laboratory comparisons, but the GUM method is commonly used in evaluation of any other result of measurement.

## 1. Wprowadzenie

W dziedzinie opracowania wyniku pomiaru współczesną metrologię zdominowała metodyka, którą można nazwać „niepewnościową”. Metodyka ta znalazła wyraz w klasycznym już międzynarodowym dokumencie, wydanym w ostatniej dekadzie ubiegłego wieku, zwanym powszechnie Przewodnikiem [1]. Podejście powyższe polega na zastosowaniu, przy opracowaniu wyniku pomiaru, prawa propagacji niepewności. Równoległe z tą metodyką, przez wielu autorów [2-6], rozwijany jest alternatywny sposób opracowania danych pomiarowych, zwany metodyką „bayesianowską”. Podejście to opiera się na twierdzeniu Thomasa Bayesa o prawdopodobieństwie warunkowym. Polega na opracowaniu wyniku pomiaru na podstawie wcześniejszej wiedzy na jego temat, zanim zostały otrzymane konkretne dane pomiarowe. Dane te służą jedynie do korekty wyniku opracowanego na podstawie informacji pierwotnej dotyczącej określonego pomiaru. Metodyka ta może budzić wśród metrologów pewne kontrowersje, tym niemniej warto przyjrzeć się jej bliżej, aby móc je porównać.

W celu rozróżnienia sposobów obliczania niepewności obiema metodykami, przy oznaczeniach odpowiednich parametrów związanych z jej wyrażaniem, zastosowano indeks „a” dla metody niepewnościowej i indeks „b” dla metody bayesianowskiej.

## 2. Metoda niepewnościowa

W pomiarze zazwyczaj mamy do czynienia z dwoma rodzajami oddziaływań: przypadkowym i systematycznym. Oba traktowane są probabilistycznie. Niepewność pierwszego z nich wyznacza się metodą typu A, na drodze analizy statystycznej serii obserwacji, a niepewność drugiego metodą typu B, na drodze innej niż analiza statystyczna, na podstawie dostępnych źródeł informacji o błędzie systematycznym, np. ze świadectwa wzorcowania. W metodzie niepewnościowej obie informacje traktuje się jako niezależne, a niepewność standardową złożoną wyznacza się z zależności

$$u_a = \sqrt{u_{Aa} + u_{Ba}} \quad (1)$$

Do oceny niepewności standardowej typu A używa się statystyki nazywanej odchyleniem standardowym eksperymentalnym średniej

$$u_{Aa} = s(\bar{q}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (q_i - \bar{q})^2}{n(n-1)}} \quad (2)$$

gdzie  $q_i$  to wartości obserwacji, a  $n$  to ich liczba. Niepewność standardową typu B można wyznaczyć na podstawie informacji zawartej w świadectwie wzorcowania na podstawie

$$u_{Ba} = \frac{U}{k} \quad (3)$$

gdzie  $U$  to niepewność rozszerzona, a  $k$  to współczynnik rozszerzenia, podawane zawsze w świadectwie wzorcowania każdego przyrządu pomiarowego. Wynik pomiaru przedstawiany jest w postaci estymaty wielkości mierzonej oraz niepewności rozszerzonej, będącej iloczynem współczynnika rozszerzenia i złożonej niepewności standardowej. W metodyce tej zakłada się, że rozkładem wielkości mierzonej jest w przybliżeniu rozkład normalny, stąd na ogół współczynnik rozszerzenia dla poziomu ufności ok. 95 % przyjmuje się jako  $k = 2$ . Wynik pomiaru można zapisać zatem

$$y = y_a \pm 2 \cdot u_a = y_a \pm U_a \quad (4)$$

gdzie  $y_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q_i$

## 3. Metoda bayesianska

Metodyka ta opiera się na twierdzeniu Thomasa Bayesa o prawdopodobieństwie warunkowym. Twierdzenie to mówi o tym, jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  pod warunkiem zaistnienia innego zdarzenia  $B$

$$p(A|B) = \frac{p(B|A)p(A)}{p(B)} = \frac{p(B|A)p(A)}{\int p(B|A)p(A)dA} \quad (5)$$

Twierdzenia powyższe można zapisać w postaci funkcji gęstości prawdopodobieństwa

$$g(\eta|e) = \frac{g(e|\eta)g(\eta)}{\int g(e|\eta)g(\eta) d\eta} \quad (6)$$

gdzie:  $g(\eta)$  – funkcja gęstości prawdopodobieństwa związanego ze zdarzeniem  $A$  (danych eksperymentalnych),  $g(e|\eta)$  – funkcja gęstości prawdopodobieństwa związanego ze zdarzeniem  $B|A$  (po wyeliminowaniu błędu systematycznego pomiaru  $e$ ).

Przyjmując założenie o rozkładzie normalnym dla funkcji gęstości prawdopodobieństwa możemy, stosując powyższe twierdzenie, po odpowiednich przekształceniach, doprowadzić do końcowej postaci

$$\frac{y_b}{u_b^2} = \frac{y_a}{u_{Ab}^2} + \frac{y_p}{u_{Bb}^2} \quad (7)$$

$$\frac{1}{u_b^2} = \frac{1}{u_{Ab}^2} + \frac{1}{u_{Bb}^2} \quad (8)$$

gdzie  $y_p = y_a - e$  jest estymatą wielkości pozbawioną błędem systematycznym,  $u_{Ab}$  jest niepewnością standardową wyznaczaną metodą typu A, a  $u_{Bb} = u_{Ba}$  jest niepewnością standardową wyznaczaną metodą typu B.

Do obliczania niepewności typu A używa się statystyki bayesianowskiej w postaci

$$u_{Ab} = \sqrt{\frac{n-1}{n-3}} s(\bar{q}) \quad (9)$$

Należy pamiętać, że zastosowanie powyższej formuły możliwe jest tylko dla  $n > 3$ . Wynik pomiaru zapisuje się w postaci estymaty wielkości, wynikającej z przekształcenia (7), danej zależnością

$$y_b = y_a \left( \frac{u_{Bb}^2}{u_{Ab}^2 + u_{Bb}^2} \right) + y_p \left( \frac{u_{Ab}^2}{u_{Ab}^2 + u_{Bb}^2} \right) \quad (10)$$

oraz wynikowej niepewności standardowej, powstającej z przekształcenia (8)

$$u_b = \sqrt{\frac{u_{Ab}^2 u_{Bb}^2}{u_{Ab}^2 + u_{Bb}^2}} \quad (11)$$

W metodyce tej zakłada się, że rozkładem wielkości mierzonej jest rozkład normalny, stąd na ogół współczynnik rozszerzenia dla poziomu ufności ok. 95 % przyjmuje się jako  $k = 2$ , a wynik pomiaru można zapisać w postaci

$$y = y_b \pm 2 \cdot u_b = y_b \pm U_b \quad (12)$$

#### 4. Podsumowanie

Przedstawione rozważania miały na celu pokazanie alternatywnych metodyk opracowania wyniku pomiaru stosowanych we współczesnej metrologii. Metodyka bayesianow-

ska, choć nie jest nowa, raczej rzadko jest stosowana przy opracowaniu wyniku pomiaru. Wymaga większej rozważliwości i pewniejszej informacji o błędzie systematycznym przyrządu pomiarowego, gdyż otrzymywany przedział ufności jest na ogół węższy niż dla każdej z funkcji gęstości współtworzących rozkład wyników. Wynika to z zastosowania w obliczeniach iloczynu funkcji gęstości prawdopodobieństwa, w odróżnieniu do metodyki niepewnościowej, gdzie te same funkcje podlegają operacji splotu matematycznego, w wyniku którego zawsze otrzymujemy szerszy przedział ufności niż dla każdej funkcji oddzielnie. Pewnym natomiast podobieństwem obu metodyk jest przyjęcie założenia o normalności rozkładów dla funkcji gęstości prawdopodobieństwa. Należy dodać, że jest to praktyczny, najprostszy przypadek stosowania obu metodyk, ponieważ w zaawansowanej analizie naukowej funkcje gęstości mogą mieć przypisane inne rozkłady niż rozkład Gaussa. Wynikowy rozkład normalny w metodyce niepewnościowej stosuje się tylko w sytuacji, gdy do obliczeń odchylenia standardowego wykorzystujemy prawo propagacji niepewności. W metodyce bayesianowskiej można do ceny niepewności, na podstawie wiedzy wcześniejszej o pomiarze, wykorzystać informację o warunkach środowiskowych, w których ma być przeprowadzony pomiar oraz innych czynnikach wpływających na wielkość mierzoną. Metodyka niepewnościowa jest chętniej stosowana do opracowania wyniku pomiaru, ze względu na szeroki przedział ufności budowany wokół wartości średniej. Daje większe poczucie bezpieczeństwa, że wynik obejmie wartość prawdziwą wielkości mierzonej. Rozwiązania płynące z zastosowania metodyki bayesianowskiej natomiast chętniej wykorzystywane są przy opracowaniu wyników porównań międzylaboratoryjnych.

## Literatura

- [1] *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*. ISO 1995.
- [2] K. Weise, W. Woger: *A Bayesian theory of measurement uncertainty*. Measurement Science and Technology, vol. 4 (1993), s. 1-11.
- [3] R. Kacker, A. Jones: *On use of Bayesian statistics to make the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement consistent*. Metrologia, vol. 40 (2003), s. 235-248.
- [4] I. Lira: *Bayesian evaluation of comparison data*. Metrologia, vol. 43 (2006), s. S231-S234.
- [5] G. A. Kyriazis: *Comparison of GUM Supplement 1 and Bayesian analysis using a simple linear calibration model*. Metrologia, vol. 45 (2008), s. L9-L11
- [6] I. Lira: *Evaluating the Measurement Uncertainty*. Institute of Physics Publishing 2002.