Obliczenia niepewności pomiaru metodą Monte Carlo w arkuszu kalkulacyjnym

W powszechnie dostępnym arkuszu kalkulacyjnym Excel możemy wykonywać obliczenia niepewności pomiaru zgodnie z przyjętą zasadą propagacji rozkładów realizowaną metodą Monte Carlo, wyrażoną w dokumencie JCGM 101:2008. W związku z tym arkusz jest wygodnym narzędziem obliczeniowym.

Arkusz kalkulacyjny umożliwia obliczenia metodą Monte Carlo przy użyciu wbudowanej funkcji o nazwie los (w arkuszu edytowana jest w postaci LOS()). Funkcja ta oddaje zbiór wartości losowych z zakresu od 0 do 1 o rozkładzie równomiernym

$$\text{los} = \langle 0, 1)$$

Generowany zbiór wartości funkcji los jest niesymetryczny względem wartości zerowej. Można go centrować odejmując od każdej wartości funkcji los wartość 0,5 a następnie podwoić ich różnicę. Otrzymujemy w ten sposób zbiór wartości od -1 do 1

$$2(\text{los} - 0{,}5) = \langle -1, 1)$$

W przypadku zastosowań metrologicznych interesować nas będzie zbiór wartości losowych o rozkładzie prostokątnym i dowolnych wartościach granicznych: $\pm a_i$. Zbiór taki tworzy wielkość wejściową centrowaną (o wartości oczekiwanej zero) δx_i, dla której $\max(\delta x_i) = a_i$. Ze względu na praktyczność postępowania lepiej wyrażać wartość graniczną wielkości wejściowej poprzez związaną z nią niepewność standardową $u(\delta x_i)$

$$a_i = \sqrt{3} \cdot u(\delta x_i)$$

Zatem dowolną wartość centrowanej wielkości wejściowej o rozkładzie prostokątnym można wyznaczyć stosując równanie

$$\delta x_i = 2\sqrt{3} \cdot (\text{los} - 0{,}5) \cdot u(\delta x_i)$$

Zbiór wartości o rozkładzie trójkątnym można utworzyć składając dwa zbiory wartości losowych o tych samych rozkładach prostokątnych. Wystarczy zatem zsumować wartości dwóch funkcji los, centrować ich sumę odejmując wartość jeden i uwzględnić, że wartość graniczna dla rozkładu trójkątnego dana jest zależnością

$$a_i = \sqrt{6} \cdot u(\delta x_i)$$

Otrzymujemy w ten sposób równanie dowolnej centrowanej wielkości wejściowej o rozkładzie trójkątnym

$$\delta x_i = \sqrt{6} \cdot (\text{los} + \text{los} - 1) \cdot u(\delta x_i)$$

Podobnie postępujemy przy tworzeniu zbioru wartości o rozkładzie normalnym, który jest złożeniem określonej liczby zbiorów o tych samych rozkładach prawdopodobieństwa. Do składania możemy użyć 12 zbiorów wartości losowych o tych samych rozkładach prostokątnych. Wystarczy zsumować 12 funkcji los i centrować tę sumę odejmując od niej liczbę 6

$$\mathrm{N}(0,1) = \left(\underbrace{\mathrm{los} + \ldots + \mathrm{los}}_{12} - 6 \right)$$

Otrzymujemy w ten sposób zbiór wartości o rozkładzie normalnym standaryzowanym, tzn. takim którego wartość oczekiwana jest równa zero, a odchylenie standardowe równe jest jeden. Dzięki tej właściwości powyższej formuły w łatwy sposób możemy otrzymać zbiór wartości dla wielkości wejściowej centrowanej o rozkładzie normalnym i dowolnej niepewności standardowej

$$\delta x_i = \mathrm{N}(0,\ 1) \cdot u(\delta x_i)$$

Powyższą właściwość możemy również wykorzystać do wygenerowania zbioru wartości wielkości wejściowej o rozkładzie Studenta z dowolną liczbą stopni swobody v. Zgodnie z wnioskowaniem Gosseta, rozkładowi temu podlega zmienna losowa t, zdefiniowana jako

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s(\bar{x})}$$

gdzie $\bar{x}$ to średnia z ograniczonej liczebnie serii n obserwacji wywodzących się z populacji o rozkładzie normalnym i wartości oczekiwanej μ, a $s(\bar{x})$ to odchylenie standardowe eksperymentalne tej średniej. Ponieważ wyznaczamy zmienną centrowaną, dla której $\mu = 0$, to wystarczy wyznaczyć zbiór wartości ilorazu

$$t = \frac{\bar{x}}{s(\bar{x})}$$

Obliczenia wykonujemy w dwóch krokach. W pierwszym należy wygenerować zbiór o rozkładzie normalnym standaryzowanym N(0, 1), a w drugim należy pobierać z tego zbioru kolejne serie obserwacji o tej samej liczebności n, obliczając średnie i odchylenia standardowe eksperymentalne tych średnich i podzielić je przez siebie. Ponieważ w arkuszu nie ma wbudowanej funkcji statystycznej będącej odpowiednikiem statystyki o nazwie odchylenie standardowe eksperymentalne średniej to można ją utworzyć z zależności

$$s(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}}$$

gdzie $s(x)$ = ODCH.STANDARDOWE(1 : n), z adresami kolejnych n komórek zawierających wartości o rozkładzie normalnym N(0, 1). Dla tych samych adresów obliczamy również $\bar{x}$ = ŚREDNIA(1 : n).

Ostatecznie, wielkość wejściowa centrowana o rozkładzie Studenta o dowolnej wartości $u(\delta x_i)$ i liczbie stopni swobody $v = n - 1$ otrzymywana jest z równań

$$\delta x_i = \begin{cases} \mathrm{N}(0,1) \\ u(\delta x_i) \cdot \sqrt{n} \cdot \bar{x} / s(x) \end{cases}$$

W celu wygenerowania zbioru wartości dla określonych rozkładów prawdopodobieństwa odpowiednie równania wielkości wejściowych δx_i wpisujemy do 10 000 kolejnych komórek w kolumnie arkusza. W ten sposób obliczamy wartości wielkości o rozkładzie prostokątnym, trójkątnym i normalnym. W przypadku rozkładu Studenta obliczenia wykonujemy w dwóch sąsiednich kolumnach. W pierwszej wyznaczamy wartości N(0, 1) powiększając liczbę komórek o *n*. W drugiej obliczamy wartości zmiennej *t*, na wartościach komórek o adresach z pierwszej kolumny, bez powiększania liczby komórek.

W arkuszu kalkulacyjnym dla dowolnego budżetu niepewności możemy realizować obliczenia każdego liniowego lub linearyzowanego równania pomiaru (w liniowym równaniu pomiaru wszystkie współczynniki c_i wrażliwości są równe 1 lub -1, a w linearyzowanym przybierają wartość pochodnych cząstkowych). W obu przypadkach równanie wielkości wyjściowej y można przedstawić w postaci

$$y = \bar{y} + c_1 \cdot \delta x_1 + \ldots + c_N \cdot \delta x_N$$

gdzie $\bar{y}$ to estymata wielkości wyjściowej, będąca funkcją estymat wielkości wejściowych

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_N)$$

Budżet niepewności

Symbol wielkości	Estymata wielkości	Niepewność standardowa	Rozkład prawdopodo-bieństwa	Współczynnik wrażliwości	Udział niepewności
x_1	$\{\bar{x}_1\}[\bar{x}_1]$	$\{u(x_1)\}[u(x_1)]$	nazwa	$\{c_1\}[c_1]$	$\{u_1(y)\}[u_1(y)]$
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
x_N	$\{\bar{x}_N\}[\bar{x}_N]$	$\{u(x_N)\}[u(x_N)]$	nazwa	$\{c_N\}[c_N]$	$\{u_N(y)\}[u_N(y)]$
y	$\{\bar{y}\}[\bar{y}]$				$\{u_c(y)\}[u_c(y)]$

Mając wyznaczone wszystkie wielkości zapisane w tabeli budżetu niepewności możemy przystąpić do obliczeń wielkości wyjściowej metodą propagacji rozkładów przy użyciu symulacji Monte Carlo. W kolejnych kolumnach arkusza wpisujemy odpowiednie formuły obliczające wartości zgodne z odpowiednimi rozkładami dla wielkości wejściowych: prostokątnym, trójkątnym, normalnym lub Studenta.

Rozkłady prawdopodobieństwa

Rozkład prostokątny	$\mathrm{P}(0,u) = 2\sqrt{3}\cdot(\mathrm{los}-0{,}5)\cdot u$
Rozkład trójkątny	$\mathrm{T}(0,u) = \sqrt{6}\cdot(\mathrm{los}+\mathrm{los}-1)\cdot u$
Rozkład normalny	$\mathrm{N}(0,u) = \left(\underbrace{\mathrm{los}+\ldots+\mathrm{los}}_{12}-6\right)\cdot u$
Rozkład Studenta	$\mathrm{S}(0,u)\begin{cases} = \underbrace{\mathrm{los}+\ldots+\mathrm{los}}_{12}-6 \\ = u\cdot\sqrt{n}\cdot\bar{x}/s(x)\end{cases}$

u oznacza udział niepewności, będący iloczynem współczynnika rozszerzenia i niepewności standardowej (dla równań pomiaru liniowych *u* można utożsamiać z niepewnością standardową).

W oddzielnej kolumnie wykonujemy obliczenia równania pomiaru wprowadzając do każdej komórki tej kolumny sumę estymaty wielkości wyjściowej $\bar{y}$ i możliwych wartości dla wszystkich wielkości wejściowych zgodnie z przyjętymi rozkładami prawdopodobieństwa. Ponieważ w kolumnie tej zapisane są formuły realizujące równanie pomiaru, należy ją przekopiować do innej kolumny w postaci samych wartości liczbowych (operacja: wklej specjalnie – wartości). Następnie sortujemy zbiór tych wartości od najmniejszej do największej (operacja: sortuj rosnąco). W kolumnie obok możemy również wpisać kolejne prawdopodobieństwa, zaczynając od wartości p = 0,0001 a kończąc na wartości p = 1, z krokiem 0,0001. W ten sposób możemy zobrazować, przy użyciu operacji wstaw wykres (punktowy), dystrybuantę numeryczną rozkładu prawdopodobieństwa związanego z wielkością wyjściową. Z posortowanego zbioru wartości dla wielkości wyjściowej odczytujemy zawartość komórek: 250 i 9750. Komórki te przedstawiają wartości dolnej i górnej granicy przedziału rozszerzenia dla prawdopodobieństwa 95 %. Odejmując od wartości górnej granicy dolną jej wartość i dzieląc wynik przez dwa otrzymujemy niepewność rozszerzoną dla prawdopodobieństwa 95 %.

Wykonując obliczenia w arkuszu można również skorzystać z narzędzi analizy danych zawartych w dodatku Analysis ToolPak w postaci generatorów liczb pseudolosowych o różnych rozkładach. Szczególnie przydatny może być generator o rozkładzie jednostajnym i normalnym, co można wykorzystać przy realizacji obliczeń metodą Monte Carlo.

Dr inż. Paweł Fotowicz